ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DEUXIEME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Ce sujet comporte 2 pages de texte.

N.B. Les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre.

I

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé, Oxyz.

Tous les arcs géométriques étudiés dans ce problème sont supposés orientés et de classe C^3. s désigne l'abscisse curviligne d'un point M et $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ les vecteurs unitaires du repère de Frenet en M.

Soit S la sphère de centre O et de rayon a donné (a > 0). On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des arcs géométriques C ayant la propriété suivante :

$\forall M \in C$, la tangente en M à C est tangente à la sphère S.

Montrer qu'un arc C est élément de $\mathcal{E}$ si et seulement si

(1) $\forall M \in C \quad (\vec{OM}.\vec{T})^2 = \vec{OM}^2 - a^2$

II

1°. a) Soit un arc C, élément de $\mathcal{E}$. Montrer que, lorsqu'il est défini, le plan osculateur à C en un point M non situé sur la sphère S, est tangent à la sphère S.

b) Réciproquement, soit Γ un arc géométrique tel que le plan osculateur en chacun de ses points soit tangent à la sphère S. Γ appartient-il à l'ensemble $\mathcal{E}$?

(On pourra utiliser, sans avoir à le démontrer, le fait que $\frac{d\vec{B}}{ds}$ est colinéaire à $\vec{N}$).

2°. a) Soit un arc C, élément de $\mathcal{E}$, sans point commun avec la sphère S. Montrer qu'il existe une relation simple entre l'abscisse curviligne d'un point M de C et sa distance au point O.

b) Soit H le point de contact de la tangente en M à C avec la sphère S. Montrer que $\overrightarrow{HM} = (s - s_o) \overrightarrow{T}$ où s_o est une constante.

c) Réciproquement, soit un arc Γ tel que le point H de la tangente en M défini par $\overrightarrow{HM} = s \overrightarrow{T}$ soit la projection orthogonale de O sur elle. La tangente à Γ est-elle tangente à une sphère fixe de centre O ?

III

On repère le point M par ses coordonnées semi-polaires (r, θ, z) dans le repère Oxyz (r rayon vecteur, θ angle polaire).

1°. Exprimer la condition (1) à l'aide de r, θ et z.

2°. On se propose de déterminer les arcs de $\mathcal{E}$ qui sont situés sur le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon donné b ($b > 0$). Former l'équation différentielle vérifiée par z et θ. Pour quelles valeurs de b a-t-elle des solutions ? Intégrer cette équation.

En déduire une représentation paramétrique en semi-polaires

$$r = f(\theta) \qquad z = g(\theta)$$

de celui des arcs tracés sur le cylindre $r = b$ qui est situé dans le demi-espace $z > 0$ et qui, pour $\theta = 0$, a un point commun avec la sphère S.

3°. On se propose de déterminer les arcs de $\mathcal{E}$ qui sont tracés sur le cône de révolution d'axe Oz, de sommet O qui a pour équation $z = r \operatorname{tg} \alpha$ (α donné, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

a) Former l'équation différentielle qui lie r et θ. Intégrer cette équation.

b) En déduire une représentation paramétrique en semi-polaires

$$r = f_1(\theta) \qquad z = g_1(\theta)$$

de celui des arcs tracés sur le cône $z = r \operatorname{tg} \alpha$ qui, pour $\theta = 0$, a un point commun avec la sphère S de cote z_o positive.

c) On suppose que $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Montrer que la projection sur le plan Oxy de l'arc de la question précédente a pour équation polaire

$$r = \frac{a}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

Etudier et construire cette courbe.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail